

# Algebrai specifikációk

*Szlávi Péter*

*ELTE IK Média- és Oktatásinformatikai Tanszék*

[szlavip@elte.hu](mailto:szlavip@elte.hu)

<http://people.inf.elte.hu/szlavi>



# Tartalomjegyzék

- 1 A lista algebrai specifikációja
  - 1.1 Lista-műveletek
  - 1.2 Lista-axiómák
- 2 A verem algebrai specifikációja
  - 2.1 Verem-műveletek
  - 2.2 Verem-axiómák
- 3 A sor algebrai specifikációja
  - 3.1 Sor-műveletek
  - 3.2 Sor-axiómák
- 4 A prioritási sor algebrai specifikációja
  - 4.1 Prioritási sor-műveletek
  - 4.2 Prioritási sor-axiómák





# 1 A lista algebrai specifikációja

## *1.1 Lista-műveletek*

Típus Lista(Elem):

*Asszociált műveletek:*

Üres: Lista

Üres?(Lista): Logikai

***Tele?(Lista): Logikai***

ElemÉrték(Lista): Elem  $\cup$  {**NemDef**}

ElemMódosít(Lista,Elem): Lista  $\cup$  {NemDef}

Elsőre(Lista): Lista  $\cup$  {NemDef}

Következőre(Lista): Lista  $\cup$  {NemDef}

BeszúrMögé(Lista,Elem): Lista  $\cup$  {NemDef}

BeszúrElejére(Lista,Elem): Lista  $\cup$  {NemDef}



## 1.1 Lista-műveletek (folytatás)

Kihagy(Lista): Lista  $\cup$  {NemDef}

Utolsó?(Lista): Logikai  $\cup$  {NemDef}

*Kiegészítő műveletek:*

BeszúrElé(Lista,Elem): Lista  $\cup$  {NemDef}

ElemSzám(Lista): Egész

*A kétirányú lista további műveletei:*

Utolsóra(Lista): Lista  $\cup$  {NemDef}

Előzőre(Lista): Lista  $\cup$  {NemDef}

*BeszúrElé(Lista,Elem): Lista  $\cup$  {NemDef}*

Első?(Lista): Logikai  $\cup$  {NemDef}



## 1.1 Lista-műveletek (folytatás)

### *A ciklikus lista:*

olyan *egy- vagy kétirányú lista*, amelynek az utolsó elemét az első követi, az elsőt pedig az utolsó előzi meg. Így kevesebb műveletre van szükség a megvalósításához.

### *A gyűrű:*

olyan *ciklikus lista*, amelynek nincs kitüntetett első, ill. utolsó eleme.



# 1.1 Lista-műveletek (folytatás)

*További lehetséges műveletek:*

Első(Lista): (Lista × Elem) ∪ {NemDef}

Következő(Lista): (**Lista** × **Elem**) ∪ {NemDef}

Utolsó(Lista): (**Lista** × **Elem**) ∪ {NemDef}

Előző(Lista): (**Lista** × **Elem**) ∪ {NemDef}

Egymásután(Lista,Lista): Lista

*Axiómák:*

$l, l', l'' : Lista(Elem)$

$e, f : Elem$

$h, h' : Egész$



## 1.2 *Listaxiómák*

### *Üres-axiómák*

1° Az Üres lista üres.

$$l = \text{Üres} \rightarrow \text{Üres?}(l)$$

2° Üres listának nincs eleme.

$$\text{Üres?}(l) \leftrightarrow \text{ElemSzám}(l) = 0$$

3° Az üres listának nincs aktuális, első, ... utolsó eleme.

$$\text{ElemÉrték}(\text{Üres}) = \text{NemDef} \wedge$$

$$\text{Első?}(\text{Üres}) = \text{NemDef} \wedge \text{Első}(\text{Üres}) = \text{NemDef} \wedge$$

$$\text{Következő}(\text{Üres}) = \text{NemDef} \wedge$$

$$\text{Előző}(\text{Üres}) = \text{NemDef} \wedge \text{Utolsó}(\text{Üres}) = \text{NemDef} \wedge$$

$$\text{Utolsó?}(\text{Üres}) = \text{NemDef}$$





## 1.2 *Listaxiómák (folytatás)*

### *Mozgás+érték hiba-axiómák*

4a° Nincs elsőt megelőző és nincs utolsót követő eleme a listának.

*Előző(Elsőre(l))=NemDef*  $\wedge$

*Következő(Utolsóra(l))=NemDef*

4b° A ciklikus listában az elsőt megelőző az utolsó, az utolsót követő pedig az első.

*Előző(Elsőre(l))=Utolsó(l)*  $\wedge$

*Következő(Utolsóra(l))=Első(l)*







## 1.2 Lista-axiómák (folytatás)

### Végek+értékek axióma

5° A lista Utolsó-ra művelettel kiválasztott eleme az ElemSzám-adik, az 1. elemét az Első-re művelet választja ki.

$$Utolsó?(Utolsóra(l)) \wedge Első?(Elsőre(l)) \wedge$$
$$h = ElemSzám(l) - 1 \rightarrow$$
$$Következőre^h(Elsőre(l)) = Utolsóra(l) \wedge$$
$$0 \leq h < ElemSzám(l) - 1 \rightarrow$$
$$\neg Utolsó?(Következőre^h(Elsőre(l))) \wedge$$
$$0 < h \leq ElemSzám(l) - 1 \rightarrow$$
$$\neg Első?(Következőre^h(Elsőre(l)))$$



## 1.2 Lista-axiómák (folytatás)

### Bővítés axiómája

6° A BeszúrMögé művelet bővíti a listát az adott elemmel. Az új elem az ‘aktuális’ mögé kerül. Üres listába elsőként kerül be az új elem. Az új válik aktuálissá. Ha nincs ‘aktuális’ elem vagy nincs több szabad hely, akkor a művelet eredménye nem definiált.

$$f = \text{ElemÉrték}(l) \wedge \neg \text{Tele?}(l) \rightarrow \exists l' = \text{BeszúrMögé}(l, e):$$

$$\text{ElemSzám}(l') = \text{ElemSzám}(l) + 1 \wedge$$

$$\text{ElemÉrték}(l') = e \wedge \text{ElemÉrték}(\text{Előzőre}(l')) = f \wedge$$

$$\text{Üres?}(l) \wedge \neg \text{Tele?}(l) \rightarrow \text{ElemSzám}(\text{BeszúrMögé}(l, e)) = 1 \wedge$$

$$\text{ElemÉrték}(\text{BeszúrMögé}(l, e)) = e \wedge$$

$$\neg \text{Üres?}(l) \wedge \text{ElemÉrték}(l) = \text{NemDef} \vee \text{Tele?}(l) \rightarrow$$

$$\text{BeszúrMögé}(l, e) = \text{NemDef}$$

A BeszúrElé művelet ennek analógiájára fogalmazható meg.



# 1.2 Lista-axiómák (folytatás)

## Kihagyás axiómája

7° Kihagyni az ‘aktuális’ elemet lehet, az ‘aktuális’ a következő lesz (ha van ilyen). Ha nincs ‘aktuális’ elem, akkor nem lehet kihagyni sem.

$$\begin{aligned} \exists \text{ElemÉrték}(l) \rightarrow \exists l' = \text{Kihagy}(l): \\ \text{ElemSzám}(l') = \text{ElemSzám}(l) - 1 \wedge \\ (\text{Üres?}(l') \vee \text{ElemÉrték}(l') = \text{ElemÉrték}(\text{Következőre}(l))) \\ \text{ElemÉrték}(l) = \text{NemDef} \rightarrow \text{Kihagy}(l) = \text{NemDef} \end{aligned}$$

Állítás: ha az utolsó az ‘aktuális’, akkor a kihagyás után nem definiált lesz az ‘aktuális’.

$$\text{Utolsó?}(l) \rightarrow \text{ElemÉrték}(\text{Kihagy}(l)) = \text{NemDef}$$

Biz.:

$$\begin{aligned} \text{Utolsó?}(l) \rightarrow \exists \text{ElemÉrték}(l) \\ 7^\circ \rightarrow \exists l' = \text{Kihagy}(l): (\text{Üres?}(l') \vee \\ \text{ElemÉrték}(l') = \text{ElemÉrték}(\text{Következőre}(l))) \end{aligned}$$

$$(1) \text{Üres?}(l') \wedge \underline{3^\circ} \rightarrow \text{ElemÉrték}(l') = \text{NemDef}$$

$$(2) \text{ElemÉrték}(l') = \text{ElemÉrték}(\text{Következőre}(l)) \wedge \underline{9^\circ} \wedge \underline{4a^\circ} \rightarrow \\ \text{ElemÉrték}(l') = \text{NemDef}$$





## 1.2 Lista-axiómák (folytatás)

### Illesztés-axióma

8° Két egymásután illesztett lista listát alkot. Elemei az eredeti kettő elemei lesznek, az eredeti sorrendben.

$$\begin{aligned} h = \text{ElemSzám}(l) \wedge h' = \text{ElemSzám}(l') \wedge l'' = \text{Egymásután}(l, l') &\rightarrow \\ \forall k \in [0, h): \text{ElemÉrték}(\text{Következőre}^k(\text{Elsőre}(l''))) &= \\ = \text{ElemÉrték}(\text{Következőre}^k(\text{Elsőre}(l))) \wedge & \\ \forall k \in [0, h'): \text{ElemÉrték}(\text{Következőre}^{k+h}(\text{Elsőre}(l''))) &= \\ = \text{ElemÉrték}(\text{Következőre}^k(\text{Elsőre}(l'))) & \end{aligned}$$



## 1.2 Lista-axiómák (folytatás)

### Pozicionálás+érték axióma

9° A következő elem az, amelyet a következőre lépés után aktuálisként érzékelünk, az előző az, amelyet az előzőre lépés után aktuálisként érzékelünk, ...

$ElemÉrték(l) \neq NemDef \rightarrow$

$Következő(l).Elem = ElemÉrték(Következőre(l)) \wedge$

$Előző(l).Elem = ElemÉrték(Előzőre(l)) \wedge$

$Első(l).Elem = ElemÉrték(Elsőre(l)) \wedge$

$Utolsó(l).Elem = ElemÉrték(Utolsóra(l))$





# 2 A verem algebrai specifikációja

## 2.1 Verem-műveletek

Típus Verem(Elem):

*Asszociált műveletek:*

Üres: Verem

Üres?(Verem): Logikai

***Tele?(Verem): Logikai***

Tető(Verem): Elem  $\cup$  {NemDef}

Verembe(Verem,Elem): Verem  $\cup$  {NemDef}

Veremből(Verem): (**Verem  $\times$  Elem**)  $\cup$  {NemDef}

VeremMélység(Verem): Egész



## 2.2 *Verem-axiómák*

### *Axiómák:*

1° Az Üres verem üres.

$$v = \text{Üres} \rightarrow \text{Üres?}(v) \wedge \text{VeremMélység}(v) = 0$$

2° Az a verem, amelyben legalább egy elem van, az nem üres; a verembe tétel során a veremmélysége eggyel nő.

$$\neg \text{Tele?}(v) \rightarrow \neg \text{Üres?}(\text{Verembe}(v, e)) \wedge \\ \text{VeremMélység}(\text{Verembe}(v, e)) = \text{VeremMélység}(v) + 1$$

3a° Az üres veremnek nincs legfelső eleme.

$$\text{Tető}(\text{Üres}) = \text{NemDef}$$

3b° Az Üres veremből nem lehet kivenni elemet.

$$\text{Veremből}(\text{Üres}) = \text{NemDef}$$

3c° A tele verembe nem lehet további elemet betenni.

$$\text{Tele?}(v) \rightarrow \text{Verembe}(v, e) = \text{NemDef}$$





## 2.2 Verem-axiómák (folytatás)

4° A verem legfelső eleme az utoljára betett elem.

$$\neg \text{Tele?}(v) \rightarrow \text{Tető}(\text{Verembe}(v,e))=e$$

5° A veremből a legfelső elemet lehet kivenni (a többi nem változik).

$$\neg \text{Tele?}(v) \rightarrow \text{Veremből}(\text{Verembe}(v,e))=(v,e)$$

Állítás: a Veremből művelet eggyel csökkenti a verem mélységét.

$$\neg \text{Tele?}(v) \rightarrow \text{VeremMélység}(\text{Veremből}(v).\text{Verem}) = \\ \text{VeremMélység}(v)-1$$

*Biz.:*

2° & 5°-ból következik.



# 3 A sor algebrai specifikációja

## 3.1 Sor-műveletek

Típus Sor(Elem):

*Asszociált műveletek:*

Üres: Sor

Üres?(Sor): Logikai

**Tele?(Sor): Logikai**

Első(Sor): Elem  $\cup$  {NemDef}

Sorba(Sor,Elem): Sor  $\cup$  {NemDef}

Sorból(Sor): (**Sor  $\times$  Elem**)  $\cup$  {NemDef}

SorHossz(Sor): Egész

## 3.2 *Sor-axiómák*

### *Axiómák:*

1° Az Üres sor üres.

$$s = \text{Üres} \rightarrow \text{Üres?}(s) \wedge \text{SorHossz}(s) = 0$$

2° Az a sor, amelyben legalább egy elem van, az nem üres; a sorba tétel során a sor hossza eggyel nő.

$$\neg \text{Tele?}(s) \rightarrow \neg \text{Üres?}(\text{Sorba}(s, e)) \wedge \\ \text{SorHossz}(\text{Sorba}(s, e)) = \text{SorHossz}(s) + 1$$

3a° Az üres sornak nincs első eleme.

$$\text{Első}(\text{Üres}) = \text{NemDef}$$

3b° Az Üres sorból nem lehet kivenni elemet.

$$\text{Sorból}(\text{Üres}) = \text{NemDef}$$

3c° A tele sorba nem lehet további elemet betenni.

$$\text{Tele?}(s) \rightarrow \text{Sorba}(s, e) = \text{NemDef}$$



## 3.2 Sor-axiómák (folytatás)

4° A sor első eleme a legrégebben betett elem.

$$\text{Üres?}(s) \wedge \neg \text{Tele?}(s) \rightarrow \text{Első}(\text{Sorba}(s,e))=e$$

$$\neg \text{Üres?}(s) \wedge \neg \text{Tele?}(s) \rightarrow \text{Első}(\text{Sorba}(s,e))=\text{Első}(s)$$

5° A sorból az első elemet lehet kivenni (a többi nem változik).

$$\text{Üres?}(s) \wedge \neg \text{Tele?}(s) \rightarrow \text{Sorból}(\text{Sorba}(s,e))=(s,e) \wedge$$

$$\neg \text{Üres?}(s) \wedge \neg \text{Tele?}(s) \rightarrow \text{Sorból}(s)=(s',e) \wedge e=\text{Első}(s) \wedge \\ \text{Sorba}(s',e')=\text{Sorból}(\text{Sorba}(s,e')). \underline{\text{Sor}}$$

*Állítás:* a Sorból művelet után eggyel csökken a sor hossza.

$$\neg \text{Üres?}(s) \rightarrow \text{SorHossz}(\text{Sorból}(s).\text{Sor})=\text{SorHossz}(s)-1$$

*Biz.:*

1° & 2° & 5° –ből következik.

# 4 A prioritási sor algebrai specifikációja



## 4.1 Prioritási sor-műveletek

Típus  $\text{PrSor}(\text{Elem}, \text{Prioritás})$ :

*Asszociált műveletek:*

Üres:  $\text{PrSor}$

Üres?( $\text{PrSor}$ ): Logikai

***Tele?(PrSor): Logikai***

Első( $\text{PrSor}$ ):  $(\text{Elem} \times \text{Prioritás}) \cup \{\text{NemDef}\}$

Sorba( $\text{PrSor}, \text{Elem}, \text{Prioritás}$ ):  $\text{PrSor} \cup \{\text{NemDef}\}$

Sorból( $\text{PrSor}$ ):  **$(\text{PrSor} \times \text{Elem} \times \text{Prioritás}) \cup \{\text{NemDef}\}$**

SorHossz( $\text{PrSor}$ ): Egész





## 4.2 *Prioritási sor-axiómák*

### *Axiómák:*

1° Az Üres prioritási sor üres.

$$s = \text{Üres} \rightarrow \text{Üres?}(s) \wedge \text{SorHossz}(s) = 0$$

2° Az a prioritási sor, amelyben legalább egy elem van, az nem üres; a sorba tétel során a sor hossza eggyel nő.

$$\neg \text{Tele?}(s) \rightarrow \neg \text{Üres?}(\text{Sorba}(s, e, p)) \wedge \\ \text{SorHossz}(\text{Sorba}(s, e, p)) = \text{SorHossz}(s) + 1$$

3a° Az üres prioritási sornak nincs első eleme.

$$\text{Első?}(\text{Üres}) = \text{NemDef}$$

3b° Az Üres prioritási sorból nem lehet kivenni elemet.

$$\text{Sorból}(\text{Üres}) = \text{NemDef}$$

3c° A tele prioritási sorba nem lehet további elemet betenni.

$$\text{Tele?}(s) \rightarrow \text{Sorba}(s, e, p) = \text{NemDef}$$



## 4.2 Prioritási sor-axiómák (folytatás)

4° A prioritási sor első eleme a legnagyobb prioritásúak közül a legrégebben betett elem.

$$\ddot{U}res?(s) \wedge \neg Tele?(s) \rightarrow Els\ddot{o}(Sorba(s,e,p))=(e,p)$$

$$\neg \ddot{U}res?(s) \wedge \neg Tele?(s) \rightarrow$$

$$s' = Sorba(s,e,p) \wedge$$

$$(Els\ddot{o}(s).Pr \geq p \rightarrow Els\ddot{o}(s') = Els\ddot{o}(s)) \wedge$$

$$(Els\ddot{o}(s).Pr < p \rightarrow Els\ddot{o}(Sorba(s,e,p)) = (e,p)) \wedge$$

$$SorHossz(s') = SorHossz(s) + 1$$





## 4.2 Prioritási sor-axiómák (folytatás)

5° A prioritási sorból az első elemet lehet kivenni (a többi nem változik).

$$\text{Üres?}(s) \wedge \neg \text{Tele?}(s) \rightarrow \text{Sorból}(\text{Sorba}(s,e,p)) = (s,e,p)$$

$$\neg \text{Üres?}(s) \wedge \neg \text{Tele?}(s) \rightarrow$$

$$\text{Sorból}(s) = (s',e',p') \wedge (e',p') = \text{Első}(s) \wedge$$

$$(\text{Első}(s).\text{Pr} < p \rightarrow s = \text{Sorból}(\text{Sorba}(s,e,p)).\text{Sor}) \wedge$$

$$(\text{Első}(s).\text{Pr} \geq p \rightarrow \text{Sorba}(s',e,p) = \text{Sorból}(\text{Sorba}(s,e,p)).\text{Sor})$$

Állítás: a Sorból művelet után eggyel csökkent a prioritási sor hossza.

$$\neg \text{Üres?}(s) \rightarrow \text{SorHossz}(\text{Sorból}(s).\text{Sor}) = \text{SorHossz}(s) - 1$$

Biz.:

2° & 5° –ből következnek.