Algoritmizálás, adatmodellezés
9. előadás

Geometriai algoritmusok

Feladat:

Adjuk meg, hogy az origóból nézve az 1. sík-negyedbe eső P ponthoz képest a Q balra, jobbra vagy pedig egy irányban látszik-e!

$$\text{Irány(P,Q)} = \begin{cases} -1, & \text{ha} \quad \text{balra} \\ +1, & \text{ha} \quad \text{jobbra} \\ 0, & \text{ha} \quad \text{egy irányban} \end{cases}$$

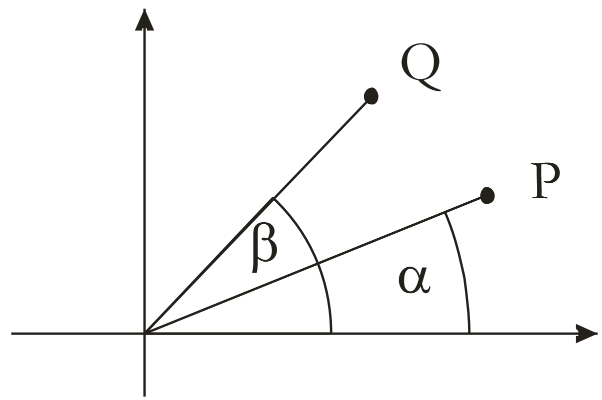
Ponttípus:

Típus Tpont=rekord(x,y: Egész)

Geometriai algoritmusok

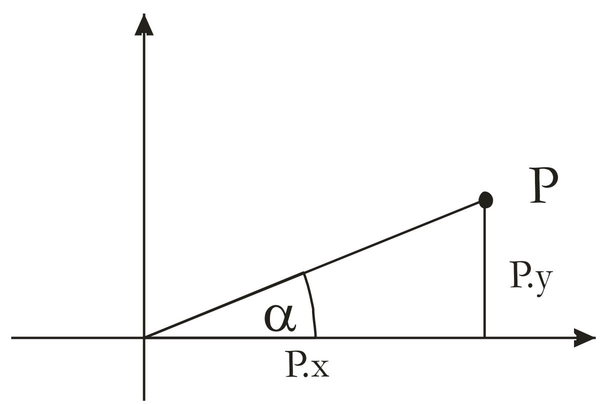
Értelmezés:

A pontok irányát megadhatjuk az oda vezető egyenes és az x-tengely szögével.



$\alpha<\beta \rightarrow \tan(\alpha)<\tan(\beta)$

$\tan(\alpha)=P.y/P.x$



Geometriai algoritmusok

$\alpha<\beta \leftrightarrow \tan(\alpha)<\tan(\beta) \leftrightarrow P.y/P.x<Q.y/Q.x \leftrightarrow$
$P.y*Q.x<Q.y*P.x \leftrightarrow P.y*Q.x-Q.y*P.x<0$

Állítás:

Irány(P,Q)=sgn(P.y*Q.x–Q.y*P.x)

(és ez igaz nem csak az 1. síknegyedben!).

$$\mathrm{sgn}(P.y*Q.x-Q.y*P.x) = \begin{cases} -1, & \text{ha Q a P-től balra} \\ +1, & \text{ha Q a P-től jobbra} \\ 0, & \text{ha Q és P egy irányban} \end{cases}$$

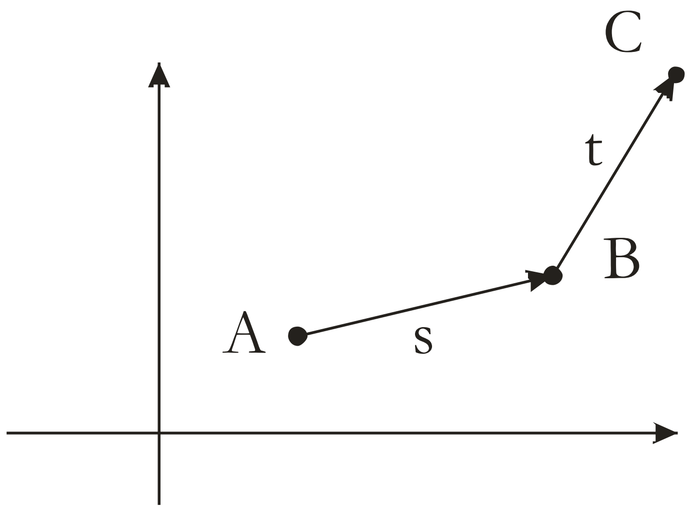
Geometriai algoritmusok

```
Irány(P,Q):
   S:=P.y*Q.x-Q.y*P.x
   Ha S<0 akkor Irány:=-1
   különben ha S=0 akkor Irány:=0
   különben Irány:=1
Függvény vége.
```

Geometriai algoritmusok

Feladat:

Egy **s** (A→B) szakaszhoz képest egy **t** (B→C) szakasz milyen irányban fordul?



Megoldásötlet:

Toljuk el az **s**-t és a **t**-t úgy, hogy az A pont az origóba kerüljön! Ezzel visszavezetjük az „irányos” feladatra!

Fordul(A,B,C)=Irány(B–A,C–A)

Ezzel ekvivalens feladat: *Az (A,B)-n átmenő egyenestől a C pont balra van, vagy jobbra van, vagy az (A,B) egyenesen van?*

Geometriai algoritmusok

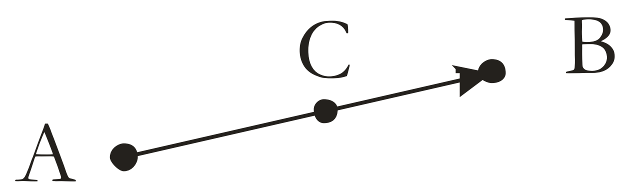
```
Fordul(A,B,C):
  P:=B-A          {P.x:=B.x-A.x; P.y:=B.y-A.y}
  Q:=C-A          {Q.x:=C.x-A.x; Q.y:=C.y-A.y}
  Fordul:=Irány(P,Q)
Függvény vége.
```

Geometriai algoritmusok

Feladat:

Döntsük el, hogy egy C pont rajta van-e egy (A,B) szakaszon!

Megoldás:



- Biztos nincs rajta, ha A-B-C úton valamerre fordulni kell!
- Ha nem kell fordulni, akkor A és B között kell lennie!

Geometriai algoritmusok

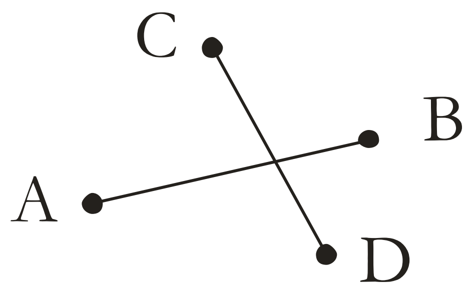
```
Rajta(a,b,c):
  Rajta:=Fordul(a,b,c)=0 és Közte(a.x,c.x,b.x)
         és Közte(a.y,c.y,b.y)
Függvény vége.
Közte(r,s,t):
  Közte:=r≤s és s≤t vagy t≤s és s≤r
Függvény vége.
```

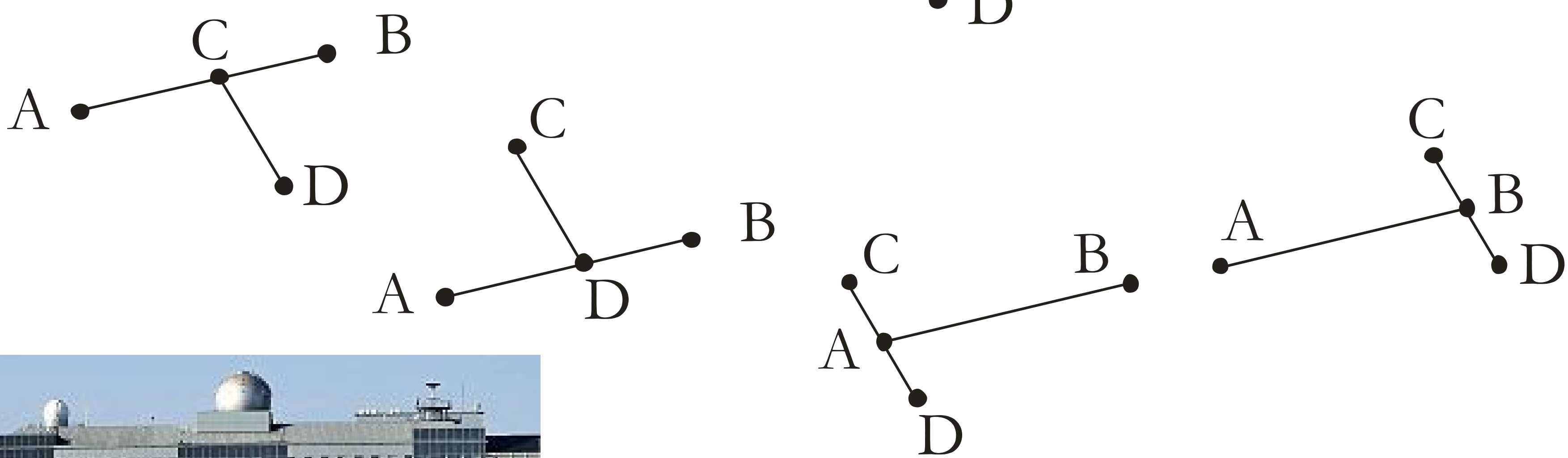
Geometriai algoritmusok

Feladat:

Döntsük el, hogy az (A,B) szakasz metszi-e a (C,D) szakaszt!

Lehetséges esetek:





Geometriai algoritmusok

```
Metszi(A,B,C,D):
  Metszi:=Fordul(A,B,C)*Fordul(A,B,D)<0 és
          Fordul(C,D,A)*Fordul(C,D,B)<0 vagy
          Rajta(A,B,C) vagy Rajta(A,B,D) vagy
          Rajta(C,D,A) vagy Rajta(C,D,B)
Függvény vége.
```

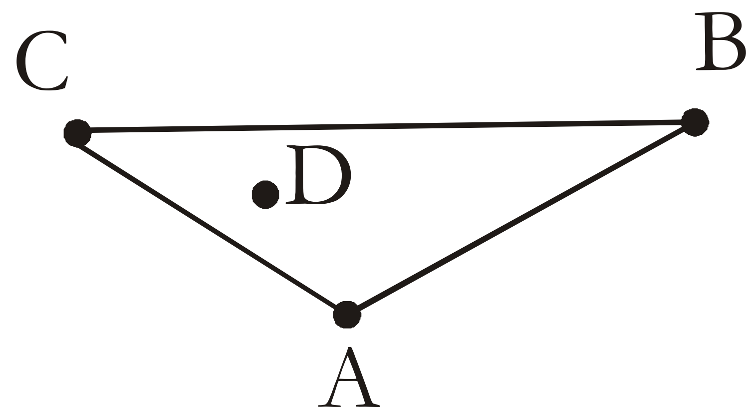
Geometriai algoritmusok

Feladat:

Döntsük el, hogy a D pont az (A,B,C) háromszög belsejében van-e!

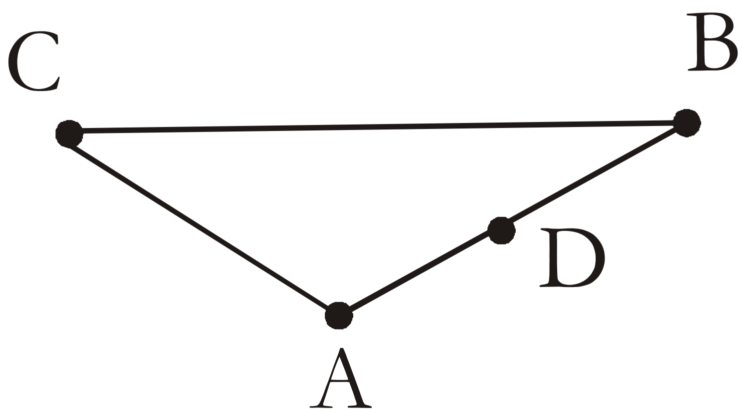
Megoldásötlet:

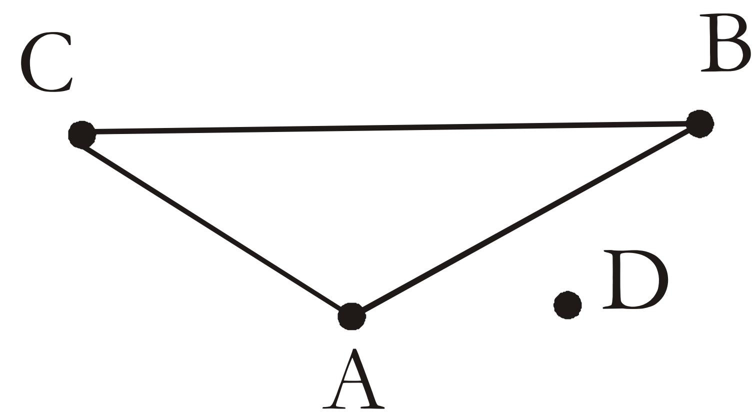
Belül van, ha a háromszöget A→B→C→A sorrendben körbejárva a D pont vagy mindig balra, vagy mindig jobbra van.



Geometriai algoritmusok

```
Belül(A,B,C,D):
  Belül:=Fordul(A,B,D)=Fordul(B,C,D)
         és Fordul(B,C,D)=Fordul(C,A,D)
Függvény vége.
```





Megjegyzés: ha a határ is beleértendő, akkor kell még 3 Rajta művelet.

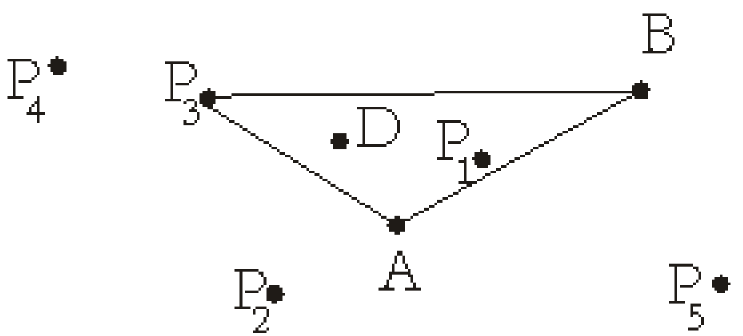
Geometriai algoritmusok

Feladat:

Adott A, B és D pont esetén adjunk meg további N pont közül egy P_i pontot úgy, hogy a D pont az (A,B,P_i) háromszög belsejében legyen!

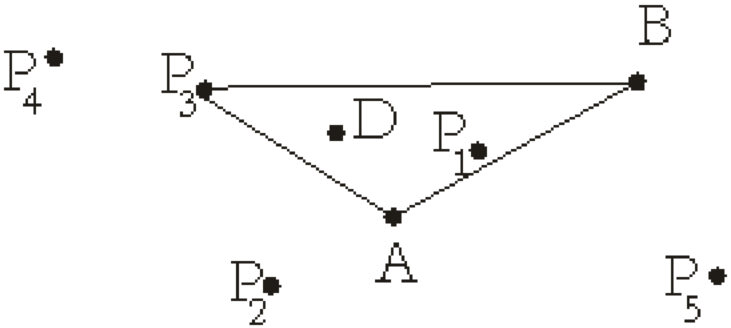
Megoldásötlet:

Belül van a P_i pont, ha a háromszöget $A \rightarrow B \rightarrow P_i \rightarrow A$ sorrendben körbejárva a D pont vagy mindig balra, vagy mindig jobbra van.



Geometriai algoritmusok

```
Keresés(A,B,N,P,D,Van,S):
  ir:=Fordul(A,B,D); S:=1
  Ciklus amíg S≤N és (Fordul(B,P(S),D)≠ir vagy
                       Fordul(P(S),A,D)≠ir)
    S:=S+1
  Ciklus vége
  Van:=S≤N
Eljárás vége.
```

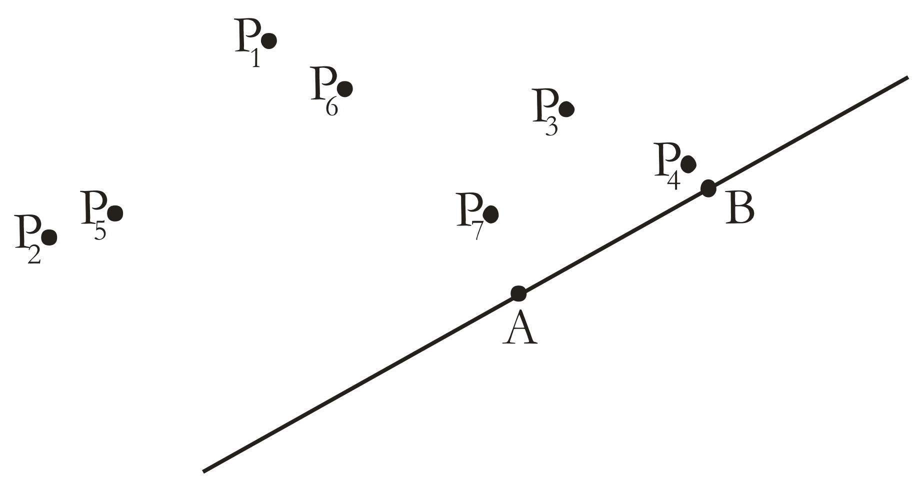


Geometriai algoritmusok

Feladat:

Adott A és B pont esetén adjunk meg további N pont közül egy P_i pontot úgy, hogy az (A,B,P_i) háromszög belsejében egyetlen más pont se legyen!

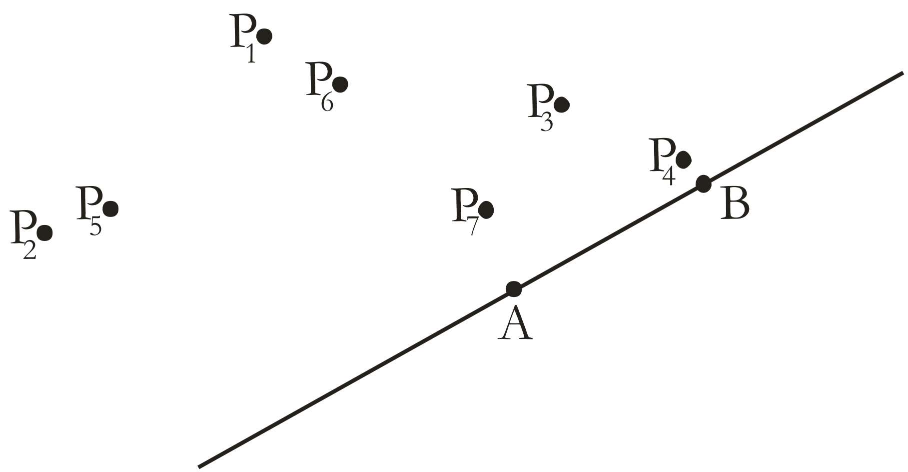
Feltehető, hogy az összes pont az (A,B) egyenestől balra van!



Geometriai algoritmusok

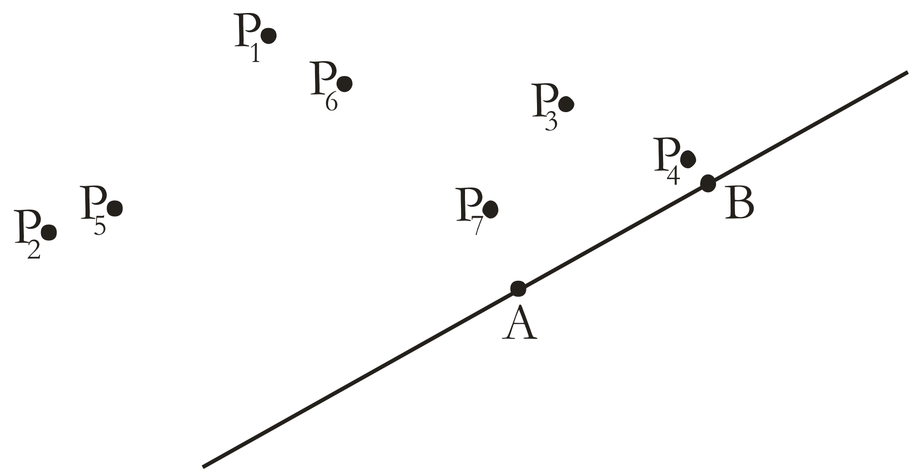
Megoldás:

Ha van egy potenciális jelöltünk (pl. P_1), akkor az (A,P_1)-től balra levők és a (B,P_1)-től jobbra levők biztos nincsenek az (A, B,P_1) háromszögben!



Geometriai algoritmusok

```
Kiválasztás(A,B,N,P,D,S):
  S:=1
  Ciklus i=2-től N-ig
    Ha Fordul(A,P(S),P(i))=1 és
       Fordul(B,P(S),P(i))=-1
     akkor S:=i
  Ciklus vége
Eljárás vége.
```



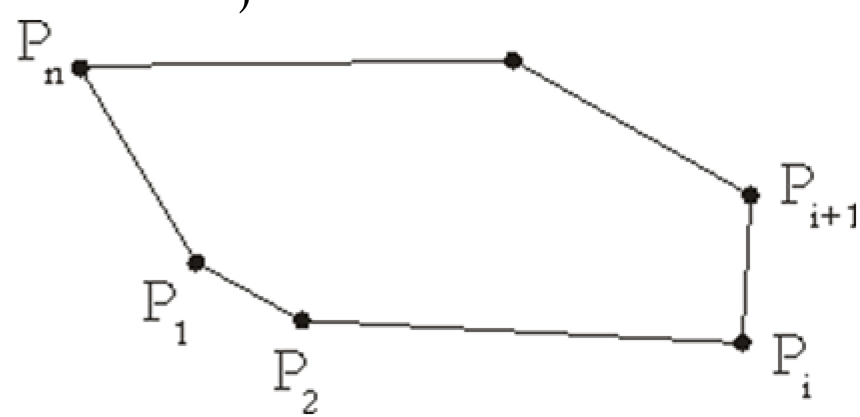
Geometriai algoritmusok

Feladat:

Döntsük el, hogy a $(P_1,\ldots,P_n)$ sokszög konvex sokszög-e! (A pontokat az óramutató járásával ellenkező sorrendben adjuk meg.)

Megoldás:

A sokszög **konvex**, ha minden szöge kisebb 180 foknál, azaz az óramutató járásával ellentétes körbejárással haladva minden csúcsban balra kell fordulni!



Geometriai algoritmusok

```
Konvex(P,N)
  P(N+1):=P(1); P(N+2):=P(2); i:=1
  Ciklus amíg i≤N és Fordul(P(i),P(i+1),P(i+2))<0
    i:=i+1
  Ciklus vége
  Konvex:=i>N
Eljárás vége.
```

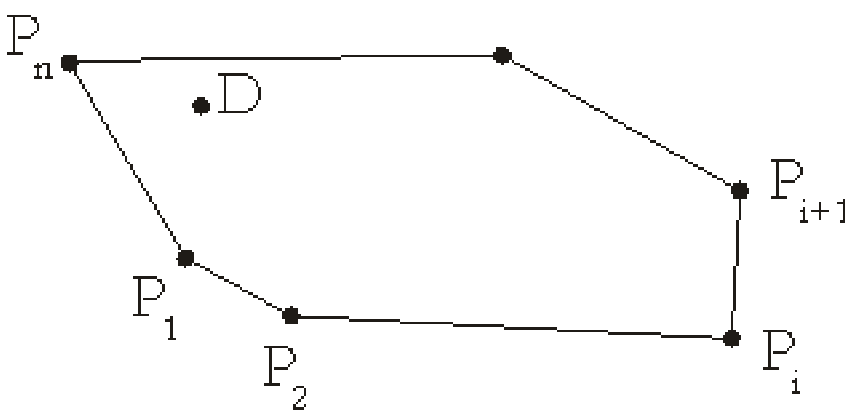
Geometriai algoritmusok

Feladat:

Döntsük el, hogy a D pont a $(P_1,\ldots,P_n)$ konvex sokszög belsejében van-e!

Megoldásötlet:

Belül van, ha a sokszöget adott sorrendben körbe-járva a D pont vagy mindig balra, vagy mindig jobbra van.



Geometriai algoritmusok

```
Belül(N,P,D):
   P(N+1):=P(1); Ir:=Fordul(P(1),P(2),D); i:=2
   Ciklus amíg i≤N és Ir=Fordul(P(i),P(i+1),D)
      i:=i+1
   Ciklus vége
   Belül:=i>N
Függvény vége.
```

Geometriai algoritmusok

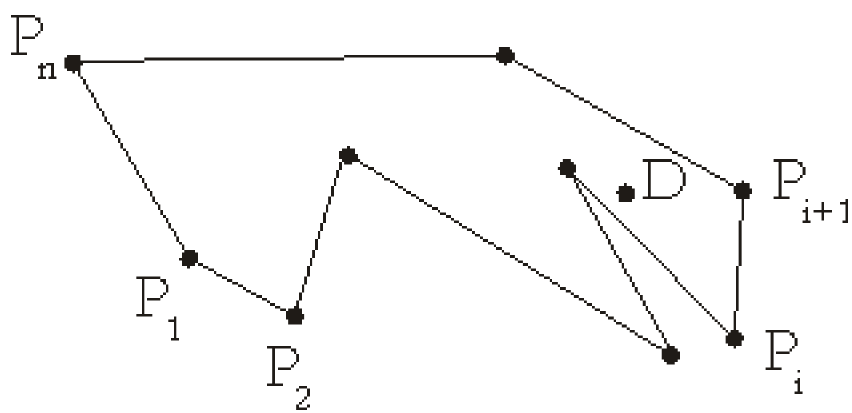
Feladat:

Döntsük el, hogy a D pont a $(P_1,\ldots,P_n)$ konkáv sokszög belsejében van-e!

Probléma:

Itt nem működik a konvex esetben alkalmazható: mindig egy irányban van elv.

Határon van: külön vizsgálható.



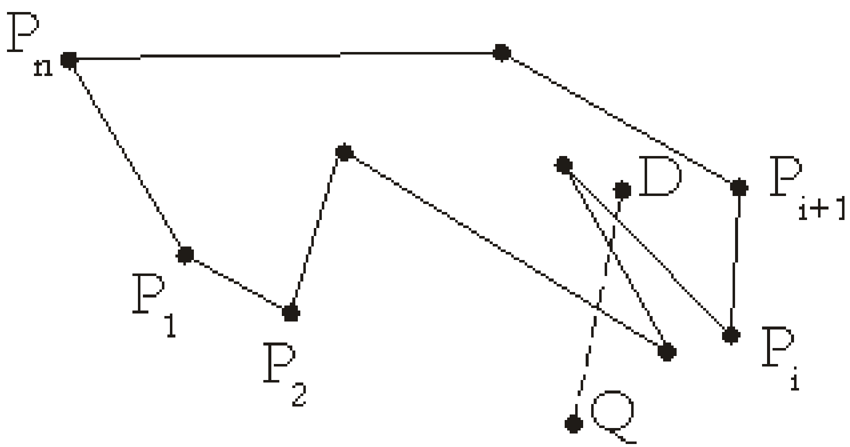
Geometriai algoritmusok

Megoldás:

Kössük össze a D pontot egy biztosan külső Q ponttal, majd számoljuk meg, hogy a (D,Q) szakasz a sokszög hány oldalát metszi!

$$Q.y := \min_{i=1,\ldots,N}\left(P_i.y\right)-1$$

$$Q.x := \max_{\substack{i=1,\ldots,N \\ P_i.x<D.x}}\left(P_i.x\right)$$



Geometriai algoritmusok

```
Belül(N,P,D):
  Külső pont(N,P,Q)
  P(N+1):=P(1); Db:=0
  Ciklus i=1-től N-ig
    Ha Metszi(P(i),P(i+1),D,Q) akkor Db:=Db+1
  Ciklus vége
  Belül:=(Db mod 2)=1
Függvény vége.
```

Algoritmizálás, adatmodellezés
9. előadás vége